

Fiche révision Meca Flux I

Éléments d'hydrostatique

• **Fluide**: syst composé nbreuses particules, libres de se mouvoir les unes par rapport aux autres

↳ $n^*(\text{liq}) \approx 1000 \cdot n^*(\text{gaz})$

↳ Etude statistique.

• Nombre de Mach: $Ma = v / c_s$

↳ $Ma \ll 1 \Rightarrow$ écoulement incompressible

• Equation d'état: $f(P, V, T) = 0$

↳ $\rho = \rho(P, T)$ Δ

↳ Dependence en T de ρ : dilatation

↳ " " P de ρ : compressibilité

- **Equilibre mécanique d'un fluide**:

Δ On travaille avec des forces volumiques $d\vec{F} = \vec{f}_{\text{vol}} \cdot d^3V$

• A l'équilibre: $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = + \text{grad}(P) \cdot d^3V$

↳ chg^z ref

$$\sum \vec{f}_{\text{vol, ext}} = + \text{grad}(P)$$

• **Fluide dans champ pesantier**: $\frac{\partial P}{\partial z} = -\mu g$

• **Fluide dans ref non galiléen**: $\vec{f}_{\text{ext}} - \mu (\vec{f}_{\text{ie}} + \vec{f}_{\text{ic}}) = \text{grad}(P)$

- Poussée d'Archimède:

$$\vec{\pi} = - \rho_{\text{fluide}} \cdot V \cdot \vec{g}$$

⚠ Le centre de poussée peut être différent du centre de masse.

Cinématique des fluides

• Description Lagrangienne:

- On suit une particule au cours du temps

$$\hookrightarrow x(t) = f(x_0, t_0, t) \quad \Rightarrow \quad v_L(x_0, t_0, t) = \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\hookrightarrow x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v_L(x_0, t') dt' \quad : \text{trajectoire}$$

• Description Eulerienne:

- On regarde la vitesse en un point π (de filement des particules)

$$\hookrightarrow x(t) = \int v_E(x, t) dt$$

$$\hookrightarrow v_L = v_E(f(x_0, t_0, t), t)$$

↳ ligne de courant : parallèle à \vec{v}

$$\Rightarrow d\vec{\pi} \wedge \vec{v} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}$$

- Dérivée particulière:

$$\frac{d\vec{f}}{dt} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad } \vec{f}$$

Fiche révision: Mec Flu, II

Conservation de la masse:

$$\underbrace{\iiint_V \frac{d\rho}{dt} d^3V}_{\text{Variation}} + \underbrace{\iint_S \rho \vec{v} d^2S}_{\text{Sortie}} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{div}(\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

$$\operatorname{div}(\rho \vec{v}) = \rho \operatorname{div} \vec{v} + \vec{v} \operatorname{grad}(\rho)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\rho \operatorname{div}(\vec{v}) + \frac{d\rho}{dt} = 0}$$

• Débit massique: $Q_m = \iint_S \rho \vec{v} d^2S$

• Débit volumique: $Q_v = \iint_S \vec{v} d^2S$

• Densité volumique de courant de masse: $\vec{j} = \rho \vec{v}$

- Ecoulement incompressible:

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = 0$$

⚠ on peut avoir écoulement incompressible de fluides compressibles

- Ecoulement potentiel

• $\vec{v} = \operatorname{grad} \varphi(x, t)$ avec φ : potentiel des vitesses

- Ecoulement irrotationnel:

• $\operatorname{rot}(\vec{v}) = \vec{0} \Leftrightarrow$ écoulement potentiel.

- Ecoulement plan:

• Vitesse égale par $z = \text{cte} \Rightarrow v(x, y, t)$

- Ecoulement plan stationnaire incompressible

$$\text{div}(\vec{v}) = \frac{dv_x}{dx} + \frac{dv_y}{dy} = 0 = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \end{cases}$$

\Rightarrow Les lignes de courant sont les $\psi = \text{cte}$

- Ecoulement plan stationnaire irrotationnel

$$\text{rot}(\vec{v}) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \vec{e}_z = \vec{0}$$

- Ecl² plan, statio, incompressible, irrot

$$\Delta \phi = \Delta \psi = 0$$

Dynamique des fluides parfaits

- Equation d'Euler:

• Dans un fluide parfait (viscosité nulle \Rightarrow effets internes normaux)

$$\rho \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right] = \rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \text{rot}(\vec{v}) \wedge \vec{v} \right] \\ = -\text{grad} \rho + \vec{f}_{\text{ext}}$$

- Effet Magnus

• Un objet en rotation dans un écoulement fluide subit une force de portance (viscosité)

• Pour un cylindre $\vec{F}_p = -\rho \cdot M_0 \int_e \vec{v} \cdot d\vec{e}$

Dynamique d'un fluide visqueux

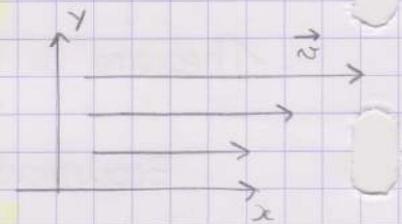
- Force de viscosité

↳ effort interne tangent à la surface.

$$\vec{F}_{\tau} = \eta \frac{\partial v}{\partial y} \cdot S \cdot \vec{e}_x = -\gamma \text{grad}(p_{\text{axe}}) \cdot S \cdot \vec{n}$$

coefficient viscosité dynamique en Pa·s = kg·m⁻¹·s⁻¹ = Pl.

↳ coefficient viscosité cinématique: $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ (m²·s⁻¹ = St)



- Fluide Newtonien: $\eta = \text{cte}$

↳ si η augmente avec $\partial v / \partial y$: rheo-épaississant (maïzena)

↳ " diminue " : rheo-fluideifiant (peinture - sang)

↳ code qu'à partir contrainte \Rightarrow à seuil (dentifrice)

- Force cisaillement:

↳ fluide au dessus et au dessous exercent \vec{F}_{τ} . ($F_{\tau}(y+dy) - F_{\tau}(y)$)

$$\vec{f}_{\text{cis, vol}} = \eta \Delta \vec{v}$$

↳ filet fluide rapide entraîne les lents et inversement

Fiche révision Méca Flux IV

Conditions aux limites

↳ Continuité de la vitesse (⚠ Différent du fluide parfait)

- Solide - fluide $\Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$

- Fluide - fluide $\Rightarrow \vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2$ et $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$

Equation de Navier Stokes:

$$\rho \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = - \text{grad } P + \eta \Delta \vec{v} + \vec{f}_{\text{vol, ext}}$$

Nombre de Reynolds:

$$Re = \frac{\rho u L}{\eta} = \frac{u L}{\nu}$$

avec u vitesse moyenne fluide
 L diamètre du tube

- Ecoule^t laminaire ($Re \leq 2000$) lignes courant glisse en ser centres
- Ecoule^t turbulent ($Re \geq 2000$): instable: structure chaotique.

$$Re = \frac{Q_{\text{conv}}}{Q_{\text{diff}}} = \frac{\rho u^2}{\eta u/L} = \frac{T_{\text{diff}}}{T_{\text{conv}}} = \frac{L^2/\nu}{L/u} = \frac{\|(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v}\|}{\|\nu \Delta \vec{v}\|} = Re$$

↳ a haute vitesse on a plus de convection que de diff.

Analogie hydro-electrique

• Résistance hydraulique: $R_h = \Delta P / Q_v = " \Omega / I "$

↳ n tube section $\frac{S}{n}$: $R_{\text{eq}} = n \cdot \frac{\Delta P}{Q_{v,1}} = n R_1$

↳ gros tube = mieux

Écoulements rampants (Re petit)

↳ $Re \ll 1 \Rightarrow (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \ll \nu \Delta \vec{v}$

↳ Permanent : $-\text{grad } P + \eta \Delta \vec{v} + \vec{f}_{\text{ext}} = 0$ Stokes

↳ Si on a juste $\eta \Delta \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow$ réversible

Milieu poreux

• cavité de petite dimension au fluide peut s'écouler.

↳ porosité : $P = V_p / V_{\text{solide}}$

• Par n capillaires parallèles (milieu poreux)

$$v_m = \frac{Q_{v,n}}{S} = \frac{Q_{v,1}}{nS} = \frac{\Delta P S}{8\eta L n} = \frac{S}{8\eta L n} \frac{P_s - P_e}{L} = k \frac{P_s - P_e}{L}$$

↳ Loi Darcy : $\vec{v} = \frac{k}{\eta} \text{grad } p$ où $Q_v = \frac{kS}{\eta} \frac{\Delta P}{L}$
 perméabilité

Force de traînée :

coeff traîné

Section apparente

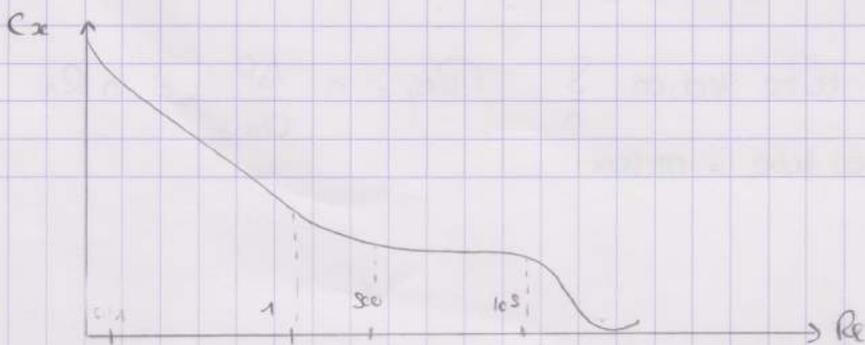
$F_{\text{traînée}} = \frac{1}{2} C_x \cdot \rho \cdot v_{\infty}^2 \cdot S_{\text{app}}$: Ser en Solide ds écoule[±]

• $Re < 1 \Rightarrow C_x \propto 1/Re$; $F \propto v_{\infty}$

• $1 < Re < 500 \Rightarrow$ tourbillon derrière sphère

• $10^3 < Re < 10^5 \Rightarrow C_x \approx \text{cste}$; $F \propto v_{\infty}^2$

• $Re > 10^5 \Rightarrow$ tourbillon chaotique : transition couche limite



Fiche révision Méca Flu, IV

Couche limite

- Zone proche du solide est raccorde[±] entre vitesse nulle et vitesse moy
 - ↳ zone où on a des tourbillons
 - ↳ épaisseur diminue quand Re augmente.
 - ↳ prendre en compte viscosité et convection
- Ecoulement incompressible, statio, grand Re

épaisseur couche lim $\rightarrow \frac{\delta}{L} \approx \frac{1}{\sqrt{Re}}$

• Plaque plane: $\frac{F_{traînée}}{\rho} = 0,664 \sqrt{\eta \rho} u^3 L$

- Décollement de la couche limite par Re trop grand

$$v_{\theta} = -u \left(1 - \frac{r^2}{r^2}\right) \sin \theta \quad v_r = u \left(1 - \frac{r^2}{r^2}\right) \cos \theta$$

$$\Rightarrow P = (P_0 + \rho u^2/2) - \rho \frac{v_{\theta}^2}{2}$$

- ↳ Limitation décolle[±] couche limite \Rightarrow minimiser[±] force traînée
- ↳ balle golf non lisse (meilleure adhérence couche limite)

Bilan dans les fluides

$$\frac{dE_s^*}{dt} = \frac{dE_s}{dt} + (u_B + \frac{v_B^2}{2} + g z_B) D_{m,B} - (u_A + \frac{v_A^2}{2} + g z_A) D_{m,A}$$

• Puissance force pression: $P = p_A S_A v_A - p_B S_B v_B = \frac{p_A}{\rho} D_{m,A} - \frac{p_B}{\rho} D_{m,B}$

• Comme $h = u + P/\rho$

↳ permanent: $P_{th} + P_u = \left[(h_B - h_A) + \frac{v_B^2 - v_A^2}{2} + g(z_B - z_A) \right] D_m$

Capillarité :

• Tension superficielle : $\delta W = \delta dA$

↳ A l'interface les molécules perdent la moitié de leur interactions

$$\vec{F} = -\delta \cdot b \cdot \vec{e}_x$$

$$\delta = \frac{u}{2a^2}$$

← énergie cohésion
← surface

avec $\delta = \text{J} \cdot \text{m}^{-2}$ ou $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$: force linéique

$$\Rightarrow dG = -SdT + Vdp + \delta dA$$

$$\text{↳ A l'eq } p_{\text{int}} = p_0 + \frac{2\delta}{r}$$

↳ petit bulle à une plus grande pression \Rightarrow se vide ds grande

• Mouillage : étude de l'étalement d'un liq sur un solide

$$\text{↳ } S = \frac{E_{\text{see}}}{A} - \frac{E_{\text{mouillé}}}{A} = \gamma_{\text{SG}} - (\gamma_{\text{SL}} + \gamma)$$

paramètre
d'étalement

- $S > 0$: mouillage total

- $S < 0$: mouillage partiel \Rightarrow angle θ_E

• Loi d'Young Dupré

$$\cos \theta_E = \frac{\gamma_{\text{SG}} - \gamma_{\text{SL}}}{\gamma} \quad (\text{Bilan énergie})$$

• Mesure tension surface

$$\text{↳ tensiométrie par arrachement : } F_{\text{max}} = mg + \gamma_{\text{perimètre}}$$

Fiche révision Meca Flux VI

Competition Capillarité pesanteur

grande moje par $l > l_c = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}$

l_c longueur capillaire